Instituto de Matemática
Cálculo 2
2019-1

Prueba Nº 2

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 5	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.
- La prueba dura 100 minutos.

---

1) [**10 ptos.**] El profesor Xavier acaba de entregar las notas finales de Cálculo II a sus estudiantes. A modo de broma, el profesor le envió su nota final a uno de sus estudiantes de la siguiente manera: *Estimado, su nota final fue de un*

$$\frac{1}{10}\int_0^1 6x^2 + 37dx.$$

Lamentablemente, este estudiante se perdió la clase de integrales definidas, por lo que le solicita a usted ayudarlo mediante sumas de Riemann para saber si aprobó o no el curso. ¿Cuál es la situación final de este estudiante?

2) [**15 ptos.**] Sea f una función derivable y positiva tal que

$$\int_0^{f(x)} t\,dt = (f(x))^2 - Cx$$

para todo $x \geq 0$ y para cierta constante $C \in \mathbb{R}$. Establezca una condición sobre C de tal manera que f sea decreciente para todo $x \geq 0$.

3) [**12 ptos.**] Sea R la región del plano delimitada por las curvas $y = \ln(x)$, $y = 2$ y $x = 1$.

   a) [**6 ptos.**] Calcule el área de la región R.

   b) [**6 ptos.**] Calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región R en torno al eje Y.

4) [**8 ptos.**] Exprese, sin calcular, la integral que corresponde al volumen del sólido de revolución generado al rotar la región S en torno a la recta $y = -1$, donde S es la región delimitada por las curvas $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$.

5) [**15 ptos.**] Demuestre que

$$\int_0^1 \arccos^2(x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos(y)dy.$$

Ayuda: No es necesario calcular cada integral por separado.

DESARROLLO

1) Considerando una partición uniforme en n subintervalos con selectores iguales a los extremos derechos respectivos, se tiene que

$$\Delta x_i = \frac{1}{n}$$
$$x_i = \frac{i}{n}$$

(3 pts.)

de donde resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{10}\int_0^1 6x^2 + 37dx &= \frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(6\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 37\right)\frac{1}{n}\right) \text{ (2 pts.)}\\
&= \frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{37}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\right) \text{ (2 pts.)}\\
&= \frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{37n}{n}\right) \text{ (2 pts.)}\\
&= \frac{1}{10}(2+37) \text{ (1 pt.)}\\
&= 3,9
\end{aligned}$$

por lo que el estimado estudiante reprobó Cálculo II.

2) Derivando a ambos lados de la igualdad se tiene por el Teorema Fundamental del Cálculo que

$$f(x)f'(x) = 2f(x)f'(x) - C \text{ (6 pts.)}.$$

De la igualdad anterior se tiene que

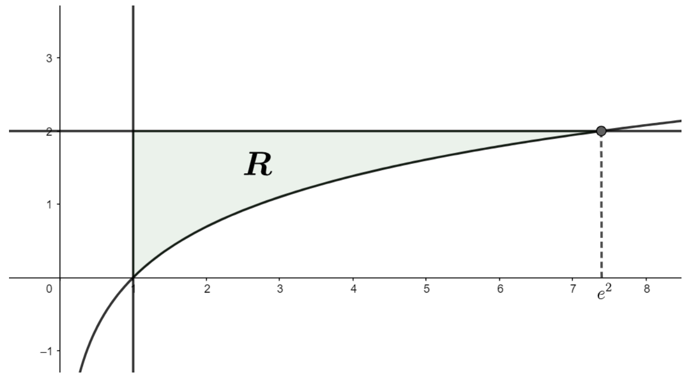
$$f(x)f'(x) = C,$$

y como f es una función positiva (2 pts.) se tiene que

$$f'(x) = \frac{C}{f(x)} \text{ (4 pts.)}$$

por lo que C debe ser un real positivo para que $f'(x) > 0$ y así f sea creciente (3 pts.).

3) a) La región R es la siguiente:



(2 pts.)

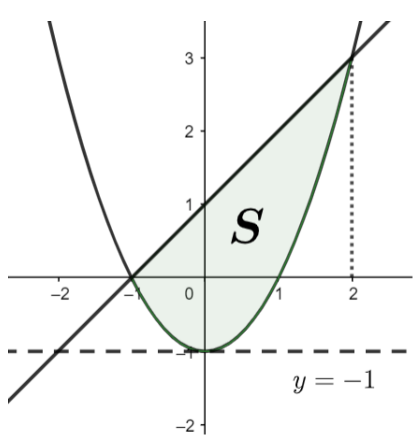
Viendo a R como una región sobre el eje X, se tiene que el área A de R es

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^{e^2} 2 - \ln(x) dx \ (2 \text{ pts.}) \\
&= (3x - x\ln(x)) \Big|_1^{e^2} \ (3 \text{ pts.}) \\
&= e^2 - 3. \ (1 \text{ pt.})
\end{aligned}
$$

b) Usando el método de los casquetes cilíndricos se tiene que el volumen V del sólido pedido es

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_1^{e^2} x(2 - \ln(x)) dx \ (2 \text{ pts.}) \\
&= 2\pi \left[x^2 - \frac{x^2 \ln(x)}{2} + \frac{x^2}{4} \right] \Big|_1^{e^2} \ (3 \text{ pts.}) \\
&= \frac{\pi}{2}(e^4 - 5). \ (1 \text{ pt.})
\end{aligned}
$$

4) La región S es la siguiente:



(4 pts. incluyendo la obtención de intersecciones de curvas)

Aplicando el método de los discos con eje de rotación $y = -1$ se tiene que el volumen V pedido está dado por

$$V = \pi \int_{-1}^{2} (x + 1 - (-1))^2 - (x^2 - 1 - (-1))^2 dx = \pi \int_{-1}^{2} (x + 2)^2 - x^4 dx \ (4 \text{ pts.})$$

5) Demostrar la igualdad solicitada es lo mismo que demostrar que

$$\pi \int_0^1 \arccos^2(x)dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos(y)dy. \text{ (2 pts.)}$$

La integral de la izquierda representa el volumen del sólido generado al rotar la curva $y = \arccos(x)$ en torno al eje X, entre $x = 0$ y $x = 1$, considerando el método de los discos. (5 pts.). Ahora, considerando el método de casquetes cilíndricos, este volumen se puede obtener haciendo el cambio

$$y = \arccos(x) \Rightarrow x = \cos(y),$$

de donde además se tiene que $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (2 pts. por todo el cambio), por lo que el volumen está dado por

$$2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos(y)dy. \text{ (5 pts.)}$$

Como el volumen es el mismo, ambas integrales tienen el mismo valor (1 pt.)